

Lycée secondaire jbel jloud	Devoir de synthèse n°1	<u>4^{ème} sciences de l'informatique</u>
<u>Prof R.slim</u>	<u>Mathématiques</u>	<u>Durée :2heures</u>

Exercice1(4points)

On considère la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = a$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n (2 - u_n)$ où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1. On suppose dans cette question que $a = \frac{1}{8}$.
 - a. Calculer u_1 et u_2 .
 - b. Dans un repère orthonormé d'unité graphique 8 cm, tracer, sur $[0,2]$, la courbe représentative (P) de la fonction $f : x \rightarrow x(2 - x)$.
 - c. Utiliser la courbe (P) pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 .
2. On suppose dans cette question que a est un réel quelconque appartenant à $]0 ; 1[$.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 1$.
 - b. Montrer que la suite (u_n) est croissante
 - c. Que peut-on en déduire ?
3. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \frac{1}{8}$.

On considère la suite numérique (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = 1 - u_n$.

- a. Exprimer, pour tout entier naturel n , v_{n+1} en fonction de v_n .
- b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
- c. Déterminer la limite de la suite (v_n) , puis celle de la suite (u_n) .

Exercice2(6points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1cm.

1. Calculer $(4 + 6i)^2$
2. Pour tout nombre complexe z , on pose $p(z) = z^4 + 4z^3 + (8 - 12i)z^2 + (8 - 56i)z - 96 - 32i$.
 - a. Calculer $p(-4)$.
 - b. Montrer que, dans \mathbb{C} , l'équation $p(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure.
 - c. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que $p(z) = [z^2 + (4 - 2i)z - 8i][z^2 + az + b]$.
 - d. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $p(z) = 0$.
3. On pose $z_1 = 2 + 2i$.
 - a. Déterminer le module z_1

- b. Ecrire z_1^{2012} sous forme algébrique.
4. On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :
 $z_A = -5 - 3i$; $z_B = 1 - i$; $z_C = -2 - \frac{2}{3}i$ et $z_P = -4$,
 et le vecteur \vec{w} d'affixe $z_{\vec{w}} = 1 + 3i$.
- Placer les points A, B, C et P dans le repère
 - Calculer $z_{\overline{AP}}$ conclure
 - Déterminer l'affixe du point D pour que $z_{\overline{BD}} = z_{\vec{w}}$
 - Quelle est la nature de APDB
- 5) Soit I le milieu de [AB], calculer l'affixe de I

Exercice3(6points)

- Factoriser le trinôme $g(x) = -x^2 - 14x + 15$.
- A l'aide du changement de variable $X = x^2$, en déduire une factorisation de $h(x) = -x^4 - 14x^2 + 15$
- Etudier le signe de $h(x)$. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{-x^3 + 5x}{x^2 + 3}$
 C_f courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé
- Déterminer les réels a et b de \mathbb{R} tels que, pour tout x de \mathbb{R} : $f(x) = ax + \frac{bx}{x^2 + 3}$
- Montrer que f est impaire. Qu'en déduire pour la courbe C_f ?
- Calculer $f'(x)$. Montrer que $f'(x) = \frac{(x^2 + 15)(1 - x^2)}{(x^2 + 3)^2}$.
- Dresser son tableau de variations.
- Soit Δ la droite d'équation $y = -x$. Montrer que Δ est asymptote à C_f . Etudier la position relative de la courbe C_f et de la droite Δ .
- Soit T la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
 - Écrire l'équation réduite de T .
 - Étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite T .

Exercice4(4points)

Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$